# TEST PRZED MATURĄ 2007

# MODELE ODPOWIEDZI
# DO PRZYKŁADOWEGO ARKUSZA EGZAMINACYJNEGO
# Z MATEMATYKI

## ZAKRES ROZSZERZONY



| Numer zadania | Modele odpowiedzi i schemat punktowania | Liczba punktów |
|---|---|---|
| **1.** | Sprawdzenie, czy warunki zadania są spełnione, gdy $a=0$: dla $m=1$ funkcja jest stała, stale dodatnia. | 1 |
| | Zapisanie warunków, kiedy trójmian kwadratowy przyjmuje zawsze wartości dodatnie: $\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ | 1 |
| | Obliczenie wyróżnika trójmianu: $\Delta=-3m^2+2m+1$ | 1 |
| | Rozwiązanie układu nierówności: $m\in(1+\infty)$ | 1 |
| | Podanie odpowiedzi: $m\in\langle 1,+\infty\ )$ | 1 |
| **2.** | Zapisanie równania wykładniczego: $\left(2\sqrt[3]{16}\right)^x=\frac{\sqrt{2}}{8}$, gdzie $x$ to wartość szukanego logarytmu. | 1 |
| | Przekształcenie równania do postaci: $2^{\frac{7}{3}x}=2^{-\frac{5}{2}}$ | 1 |
| | Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $\log_{2\sqrt[3]{16}}\frac{\sqrt{2}}{8}=-\frac{15}{14}$ | 1 |
| **3.** | Zapisanie wzoru funkcji bez użycia wartości bezwzględnej: $y=\begin{cases} 1 & dla \quad x\geq 0 \\ 4^x & dla \quad x<0 \end{cases}$ | 1 |
| | Naszkicowanie wykresu funkcji: suma półprostej i fragmentu krzywej wykładniczej. | 1 |
| | Podanie odpowiedzi: równanie ma przynajmniej jedno rozwiązanie dla $m\in(0,1\ \rangle$ | 1 |
| **4.** | Zapisanie wzoru wielomianu spełniającego warunki zadania: : $W(x)=x^2+qx^2+q^2x+q^3$ | 1 |
| | Ułożenie równania: $1+q+q^2+q^3=15$ | 1 |
| | Rozwiązanie równania: $q=2$ | 1 |
| | Podanie odpowiedzi: $W(x)=x^2+2x^2+4x+8$ | 1 |
| **5.** | Zapisanie liczby pod pierwiastkiem w postaci kwadratu liczby: $a=\sqrt{\left(3-2\sqrt{5}\right)^2}-2\sqrt{5}$ | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| | Zapisanie liczby $a$ bez użycia pierwiastka: $a=\left\|3-2\sqrt{5}\right\|-2\sqrt{5}$ | 1 |
| | Zapisanie liczby bez użycia wartości bezwzględnej, co wykazuje tezę zadania: $a=-3$ | 1 |
| **6.** | Opis zdarzeń losowych potrzebnych do rozwiązania zadania: $A$ - wylosowanie kuli białej, $B_1, B_2$ - odpowiednio wyrzucenie dwóch orłów, wyrzucenie innej liczby orłów, niż dwa w rzucie trzema monetami. | 1 |
| | Obliczenie prawdopodobieństw zdarzeń $B_1, B_2 : P(B_1)=\frac{3}{8}, P(B_2)=\frac{5}{8}$ | 1 |
| | Obliczenie prawdopodobieństw warunkowych: $P(A/B_1)=\frac{5}{12}, P(A/B_2)=\frac{4}{12}$ | 1 |
| | Skorzystanie ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite i obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia $A: P(A)=\frac{35}{96}$ | 1 |
| **7.** | Zauważenie, że w mianowniku ułamka jest suma ciągu arytmetycznego i podanie parametrów tego ciągu: $a_1=4, r=4, n$ - liczba wyrazów. | 1 |
| | Zapisanie wzoru ciągu w najprostszej postaci: $a_n=\frac{n^2}{2n+2n^2}$ | 1 |
| | Obliczenie granicy: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2n+2n^2}=\frac{1}{2}$ | 1 |
| **8.** | Rozwiązanie równania dla $a\neq-5: x=\frac{b}{a+5}$ | 1 |
| | Rozwiązanie równania dla $a=-5 \wedge b=0 : x\in R$ | 1 |
| | Rozwiązanie równania dla: $a=-5 \wedge b\neq 0$ :równanie sprzeczne. | 1 |
| **9.** | Sporządzenie rysunku z oznaczeniami lub wprowadzenie dokładnie opisanych oznaczeń: $ABC$ – dany trójkąt, $\alpha$ - kąt przy wierzchołku $A$, $AD$ – dwusieczna tego kąta, $x, y$ – długości odcinków, na jakie ta dwusieczna dzieli bok przeciwległy, $\beta$ – kąt między tym bokiem i dwusieczną, $c, b$ – boki trójkąta odpowiadające odcinkom $x, y$ | 1 |
| | Zastosowanie twierdzenia sinusów dla trójkąta $ABD: \frac{x}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{c}{\sin\beta}$ | 1 |
| | Zastosowanie twierdzenia sinusów dla trójkąta $ACD: \frac{y}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{b}{\sin(180^0-\beta)}$ | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| | Wyznaczenie np $\sin\frac{\alpha}{2}$ z pierwszego równania i podstawienie do drugiego: $\frac{yc}{x\sin\beta}=\frac{b}{\sin\left(180^0-\beta\right)}$ | 1 |
| | Wykorzystanie wzoru redukcyjnego i wykazanie tezy zadania: $\frac{y}{x}=\frac{b}{c}$ | 1 |
| **10** | Sporządzenie rysunku z oznaczeniami lub wprowadzenie dokładnie opisanych oznaczeń: $ABC$ – dany trójkąt, $r$ - wysokość trójkąta poprowadzona na najdłuższy bok ( promień stożków "sklejonych" podstawami), $h_1, h_2$ - wysokości powstałych stożków | 1 |
| | Obliczenie pola trójkąta: $P=6\sqrt{11}$ | 1 |
| | Ułożenie równania z niewiadomą $r$ : $\frac{9r}{2}=6\sqrt{11}$ | 1 |
| | Obliczenie długości promieni powstałych stożków: $r=\frac{4\sqrt{11}}{3}$ | 1 |
| | Zapisanie objętości bryły jako sumy objętości dwóch stożków: $V=\frac{1}{3}\pi r^2\left(h_1+h_2\right)$ | 1 |
| | Obliczenie objętości bryły: $V=\frac{176\pi}{3}$ | 1 |
| **11** | Sporządzenie rysunku z oznaczeniami lub wprowadzenie dokładnie opisanych oznaczeń: narysowanie paraboli, stycznej do niej w punkcie o odciętej $x_0$, $ABO$ – powstały trójkąt, $O$ - początek układu współrzędnych. | 1 |
| | Wyznaczenie równania stycznej: $y=-2x_0x+x_0^{\ 2}+4$ | 1 |
| | Obliczenie współrzędnych punktów przecięcia stycznej z osiami układu współrzędnych: $A=\left(0,x_0^{\ 2}+4\right), B=\left(\frac{x_0^{\ 2}+4}{2x_0},0\right)$ | 1 |
| | Wyznaczenie pola trójkąta w zależności od $x_0$ : $P\left(x_0\right)=\frac{\left(x_0^{\ 2}+4\right)^2}{4x_0}, x_0\in\left(0,2\right)$ | 1 |
| | Wyznaczenie pochodnej funkcji opisującej pole: $x_0$ : $P^{'}\left(x_0\right)=\frac{\left(x_0^{\ 2}+4\right)\left(3x_0^{\ 2}-4\right)}{4x_0^{\ 2}}, x_0\in\left(0,2\right)$ | 1 |
| | Wyznaczenie miejsca zerowego pochodnej: $x_0=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| | Uzasadnienie, ze w znalezionym punkcie jest najmniejsza wartość funkcji i podanie odpowiedzi: funkcja stale maleje na lewo od ekstremum i stale rośnie na prawo, więc minimum funkcji jest jej najmniejszą wartością. Styczną należy więc poprowadzić w punkcie o odciętej $x_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. | 1 |
| **12** | Przekształcenie lewej strony równania z wykorzystaniem wzorów na sumę sinusów i różnicę sinusów: $\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ | 1 |
| | Doprowadzenie prawej strony do najprostszej postaci z wykorzystaniem wzoru na sinus kąta podwojonego: $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)$ | 1 |
| | Obliczenie sinusa sumy dwóch różnych kątów trójkąta: $\sin(\alpha+\beta) = 1$ | 1 |
| | Wyciągnięcie wniosku: $\alpha+\beta = 90^0 \Rightarrow$ trzeci kąt trójkąta jest prosty, więc trójkąt jest prostokątny. | 1 |